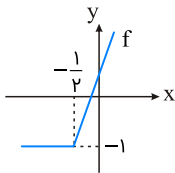




$$f(x) = \begin{cases} 2x + (2x + 1) = 4x + 1 & ; x \geq -\frac{1}{2} \\ 2x - (2x + 1) = -1 & ; x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

باتوجه به شکل، $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ بزرگترین بازه‌ای است که تابع f در آن وارون‌پذیر است، داریم:



$$f : y = 4x + 1 ; x \geq -\frac{1}{2}$$

$$x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 4x \geq -2 \Rightarrow 4x + 1 \geq -1 \Rightarrow y \geq -1 \Rightarrow D_{f^{-1}} = [-1, +\infty)$$

$$\Rightarrow f^{-1} : x = 4y + 1 ; x \geq -1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4} ; x \geq -1$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

نقاط $(5, 0)$ و $(-5, 0)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ به ترتیب به نقاط $(-\frac{a-5}{2}, 0)$ و $(-\frac{a+5}{2}, 0)$ روی نمودار تابع $y = f(2x+a)$ تبدیل می‌شوند. برای اینکه نمودار دو تابع حتماً برخورد داشته باشند، کافی است حداقل یکی از نقاط تبدیل‌شده در بازه $[-5, 5]$ قرار داشته باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -5 \leq -\frac{a+5}{2} \leq 5 \Rightarrow -5 \leq \frac{a+5}{2} \leq 5 \\ \Rightarrow -10 \leq a+5 \leq 10 \Rightarrow -15 \leq a \leq 5 \quad (1) \\ -5 \leq -\frac{a-5}{2} \leq 5 \Rightarrow -5 \leq \frac{a-5}{2} \leq 5 \\ \Rightarrow -10 \leq a-5 \leq 10 \Rightarrow -5 \leq a \leq 15 \quad (2) \end{cases}$$

اجتماع جواب‌های (۱) و (۲)، بازه $[-15, 15]$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

برای حل سؤال به صورت زیر عمل می‌کنیم:

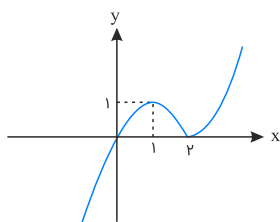
الف) ابتدا قدرمطلق را ساده می‌کنیم و ضابطه تابع را به صورت تفکیک شده می‌نویسیم. (یک بار فرض می‌کنیم $x \geq 2$ و بار دیگر فرض می‌کنیم $x < 2$ باشد و ضابطه تابع را تعیین می‌کنیم.)

ب) نمودار تابع را رسم کرده و بازه‌ای که در آن تابع نزولی است را مشخص می‌کنیم.

ج) باتوجه به این نکته که $D_{f^{-1}} = R_f$ ، دامنه تعریف تابع معکوس را مشخص کرده و ضابطه آن را نیز تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = x|x - 2| = \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow |x - 2| = x - 2 \Rightarrow y = x(x - 2) \\ x < 2 \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2) \Rightarrow y = -x(x - 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & ; x < 2 \end{cases}$$



تنها بازه‌ای که در آن تابع نزولی باشد، بازه $[1, 2]$ است. برد تابع در این بازه $[0, 1]$ است. پس $D_{f^{-1}} = [0, 1]$ (رد گزینه های ۱ و ۲). حال در محدوده مشخص شده ضابطه $f^{-1}(x)$ را تعیین می‌کنیم:

$$1 < x < 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow -y = x^2 - 2x$$

$$\xrightarrow{+1} 1 - y = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 1 - y = (x - 1)^2 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{1 - y}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x} ; 0 \leq x \leq 1$$

ابتدا ضابطه وارون تابع داده شده را حساب می‌کنیم:

$$y = \frac{2x-1}{x-2} \Rightarrow xy - 2y - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x(y-2) = 2y-1 \Rightarrow x = \frac{2y-1}{y-2}$$

حالا جای x و y را عوض می‌کنیم: $y = \frac{2x-1}{x-2}$

پس ضابطه وارون تابع داده شده به صورت $y = \frac{2x-1}{x-2}$ درمی‌آید (بد نیست بدانید در توابع به فرم $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $a = -d$ باشد، وارون تابع با تابع اولیه برابر است)

حالا ضابطه به دست آمده را با خط $y = -x$ قطع می‌دهیم:

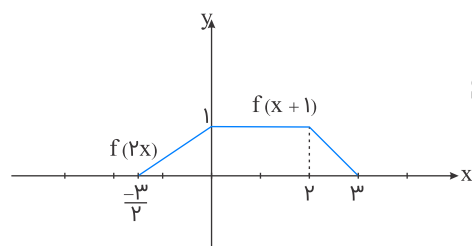
$$\frac{2x-1}{x-2} = -x \Rightarrow -x^2 + 2x = 2x-1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} A(1, -1) \\ B(-1, 1) \end{cases}$$

پس:

$$AB = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۸

نمودار تابع $g(x)$ به صورت شکل زیر است:
مساحت سطح مورد نظر برابر است با:



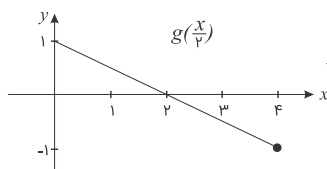
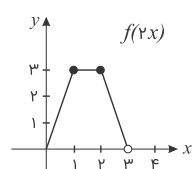
$$S = \frac{(4/5 + 2) \times 1}{2} = \frac{6/5}{2} = \frac{13}{4}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

$$D_{f(x)} = [0, 6] \Rightarrow D_{f(2x)} = [0, 3]$$

$$D_{g(x)} = [0, 2] \Rightarrow D_{g(\frac{x}{2})} = [0, 4]$$

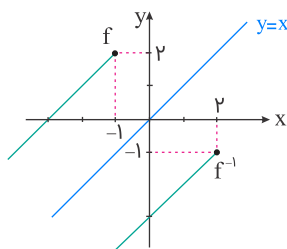
$$D_{\frac{f(2x)}{g(\frac{x}{2})}} = [0, 3] \cap [0, 4] - \{x | g(\frac{x}{2}) = 0\} = [0, 3] - \{2\}$$



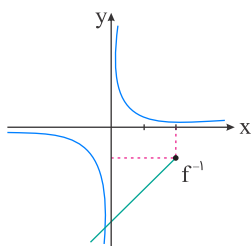
نکته: اگر دامنه $f(x)$ تقسیم بر k شود، دامنه $f(kx)$ به دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این دامنه بزرگتر و اگر $k > 1$ باشد، این دامنه کوچکتر می‌شود.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۵

نمودار f و f^{-1} را رسم می‌کنیم:



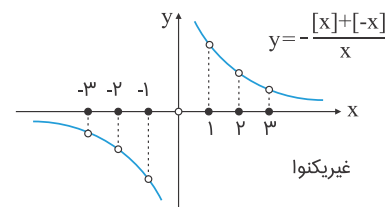
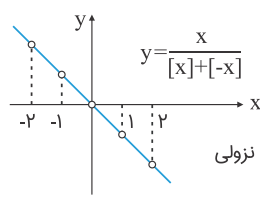
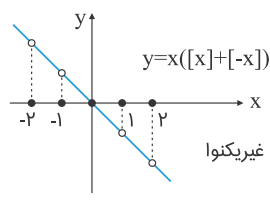
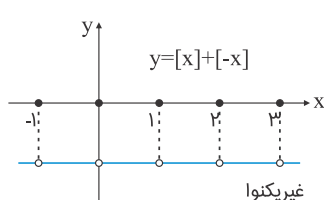
حال نمودار توابع f^{-1} و $y = \frac{1}{x}$ را در یک دستگاه مختصات می‌کشیم:



دو نمودار در یک نقطه با طول منفی متقاطع هستند.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۳۹۹ ۸

می‌دانیم اگر $x \in \mathbb{Z}$ آنگاه $x + [-x] = 0$ و اگر $x \notin \mathbb{Z}$ آنگاه $x + [-x] = -1$ پس نمودار توابع به شکل زیر است:



قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۳۹۴ ۱۲

تابع f اکیداً نزولی است. پس با کاهش x ، مقدار آن افزایش می‌یابد. باتوجه به آنکه f در $x = 1$ پیوسته است و مقدار تابع f در $x = 1$ برابر با ۶ می‌شود، پس وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، $6 < f(x) < 7$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = [6^+] = 6$$

همچنین تابع g اکیداً صعودی است، پس با کاهش x ، مقدار آن نیز کاهش می‌یابد. تابع g در $x = 1$ پیوسته است و مقدار آن در $x = 1$ برابر با ۳ است، پس وقتی $x \rightarrow 1^-$ ، $2 < g(x) < 3$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [g(x)] = [3^-] = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[f(x)]}{[g(x)]} = \frac{6}{2} = 3$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۸ ۱۸

باتوجه به شکل، دامنه تابع $f(x)$ برابر با $D_f = (-\infty, 3]$ است.

$$g(x) = \log_v^{(x^v + vx)} \Rightarrow D_g : x^v + vx > 0 \Rightarrow x(x+v) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{یا} \\ x < -v \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 0 \text{ یا } x < -v \mid \log_v^{(x^v + vx)} \leq 3\}$$

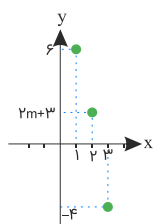
$$\log_v^{(x^v + vx)} \leq 3 \Rightarrow x^v + vx \leq \lambda \Rightarrow x^v + vx - \lambda \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x > 0 \text{ یا } x < -v \mid -4 \leq x \leq 2\} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۷

نمایش نموداری تابع f به صورت زیر است. برای اینکه تابع f اکیداً نزولی باشد، با حرکت روی نمودار از چپ به راست، باید همواره به سمت پایین حرکت کنیم؛ بنابراین باتوجه به نمودار، مقدار تابع در نقطه ۲ یعنی $2m + 3$ باید بین دو عدد ۶ و -۴ قرار گیرد:



$$-4 < 2m + 3 < 6 \Rightarrow -7 < 2m < 3 \Rightarrow -3/2 < m < 1/2$$

پس پنج عدد صحیح از -۳ تا ۱ در محدوده m قرار می گیرد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

کافی است مرحله به مرحله انتقال‌ها را انجام دهیم:

$$y = 2|x + 1| + 3 \xrightarrow[\text{یک واحد به سمت راست}]{x \rightarrow x-1} y = 2|x - 1 + 1| + 3$$

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}]{y \rightarrow -y} y = -(2|x| + 3) = -2|x| - 3$$

$$\xrightarrow[\text{۴ واحد به سمت بالا}]{y \rightarrow y+4} y = -2|x| - 3 + 4 \Rightarrow y = -2|x| + 1$$

حال نقاط تلاقی با محور x ها و y ها را به دست می‌آوریم:

$$\text{تلاقی با محور } x: y = 0 \Rightarrow |x| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{تلاقی با محور } y: x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 1 \quad \text{مجموع طول و عرض نقاط}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲۰ ۱۳۹۸

چون $f^{-1} \circ f(x) = x$ است، پس فقط باید دامنه $f^{-1} \circ f$ را بیابیم:

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = R_{f^{-1}} = [-2, 3]$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

$$(f(x))^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow f(-4) \leq f(x) \leq f(3) \xrightarrow[\text{صعودی است}]{f \text{ تابعی اکیداً}} -4 \leq x \leq 3$$

پس دامنه تابع، بازه $[-4, 3]$ و شامل ۸ مقدار صحیح است.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

باتوجه به نمودار، $(g \circ f)(x) = x$ است؛ به عبارت دیگر $g(f(x)) = x$ است. برای به دست آوردن حاصل $g(5)$ کافی است معادله $f(x) = 5$ را حل کنیم.

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{3} = 5 \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow x = 4$$

در نتیجه $g(5) = 4$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۸

ابتدا دامنه $f(x)$ را به دست آورده و سپس از روی آن دامنه $g(x) = 3f(4x - 2) - 3$ را به دست می‌آوریم:

$$-2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 11$$

پس دامنه $f(x)$ به صورت $[-5, 11]$ است. برای به دست آوردن دامنه g داریم:

$$-5 \leq 4x - 2 \leq 11 \Rightarrow -3 \leq 4x \leq 13 \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{13}{4}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۹

باتوجه به آنکه تابع f اکیداً صعودی است، به ازای $x < 1$ منفی و به ازای $x > 1$ مثبت است. حال با تعیین علامت عبارت زیر رادیکال داریم:

$$(x^3 - x)f(x) \geq 0$$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

	-1	0	1	
$x^3 - x$	-	0	-	+
$f(x)$	-	-	-	+
P	+	-	+	+

دامنه $\sqrt{(x^3 - x)f(x)}$ برابر با $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

واضح است که $(\omega, f^{-1}(\omega)) \in f^{-1}$ است، پس $(f^{-1}(\omega), \omega) \in f$ خواهد بود؛ یعنی نقطه $(f^{-1}(\omega), \omega)$ در ضابطه f صدق می‌کند. به جای $f(x)$ عدد ω و به جای x مقدار $f^{-1}(\omega)$ قرار می‌دهیم:

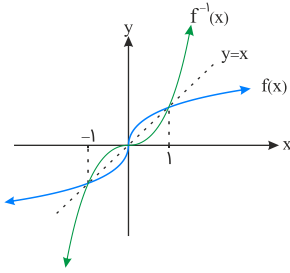
$$f(x) = f^{-1}(\omega) + x - 3 \Rightarrow \omega = f^{-1}(\omega) + f^{-1}(\omega) - 3 \Rightarrow f^{-1}(\omega) = 4$$

حال ضابطه تابع f را دوباره می‌نویسیم و $f(\omega)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = 4 + x - 3 \Rightarrow f(x) = x + 1 \Rightarrow f(\omega) = \omega + 1 = 6$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۴

ابتدا نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم:
نمودار را در چهار بازه زیر بررسی می‌کنیم:

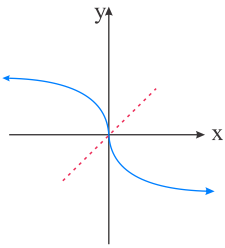


بازه	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	
رابطه	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x) - f^{-1}(x)$	+	-	+	-
$x^3 - 1$	+	-	-	+
$\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^3 - 1}$	+	+	-	-
	تعریف نشده		تعریف نشده	

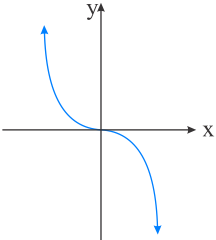
می‌دانیم که زیر رادیکال همواره باید نامنفی باشد؛ بنابراین دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x) - f^{-1}(x)}{x^3 - 1}}$ به صورت $(-\infty, 0] - \{-1\}$ است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

ابتدا خود تابع را رسم می‌کنیم:

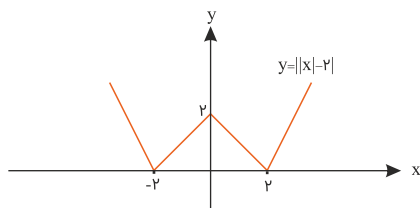


برای رسم وارون تابع، آن را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌کنیم:

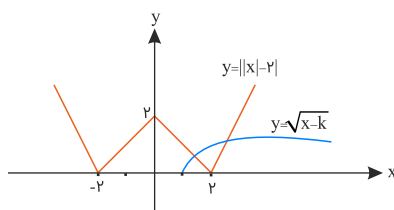
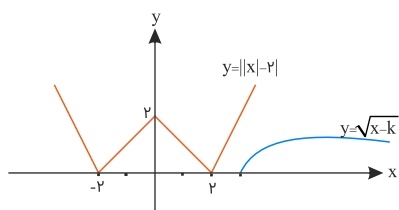
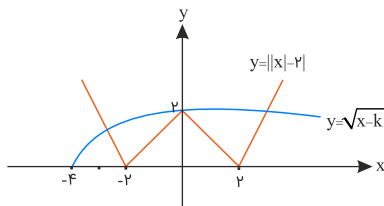
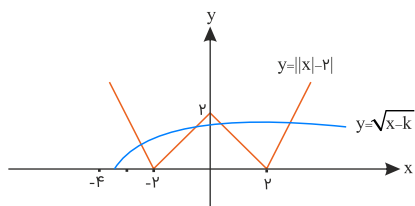


قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۹

نمودار تابع $y = ||x| - 2|$ به شکل زیر است:



نمودار تابع $y = \sqrt{x - k}$ همان نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ است که $|k|$ واحد به چپ یا راست منتقل می‌شود. مطابق شکل‌های زیر، باتوجه به محدوده k ، نمودار تابع $y = \sqrt{x - k}$ ممکن است نمودار تابع $y = ||x| - 2|$ را حداکثر در چهار نقطه قطع کند: پس معادله $||x| - 2| = \sqrt{x - k}$ حداکثر چهار جواب دارد.



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

$$f(x) = \lambda x^3 - 1 \Rightarrow f(g(x)) = \lambda g^3(x) - 1$$

$g(-1)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(g(-1)) = -1 \Rightarrow \lambda(g(-1))^3 - 1 = -1 \Rightarrow g(-1) = 0$$

مقدار $f + g$ را در $x = -1$ حساب می‌کنیم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\Rightarrow (f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-\lambda - 1) + 0 = -9$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۸

$$D_f = [-1, 2] \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$$

طبق تعریف داریم:

$$D_{f \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \left\{ -1 \leq x \leq 2 \mid \underbrace{-1 \leq 3x - 1 \leq 2}_{0 \leq 3x \leq 3} \right\}$$

$$= \{-1 \leq x \leq 2 \mid 0 \leq x \leq 1\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\} \Rightarrow b - a = 1 - 0 = 1$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۷

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \leq 2 \mid \sqrt{4 - 2x} \in \{-2, -1, 2\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\}\}$$

$$\begin{cases} \sqrt{4 - 2x} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 4 - 2x = 8 \Rightarrow x = -2 \\ \sqrt{4 - 2x} = \sqrt{6} \Rightarrow 4 - 2x = 6 \Rightarrow x = -1 \\ \sqrt{4 - 2x} = 2 \Rightarrow 4 - 2x = 4 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{0, -1, -2\}$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(-2, 0), (-1, -1), (0, 0)\}$$

$$D_{\frac{f}{f \circ g}} = D_f \cap D_{f \circ g} - \{x \mid f \circ g = 0\} = \{-1\}$$

$$\frac{f}{f \circ g} \text{ دامنهٔ اعضای } = -1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۹

راه حل اول: چون k فرد است، پس $f(k) = k + 3$ می باشد و $f(k)$ عددی زوج است، پس $\frac{f(k)}{2} = (f \circ f)(k)$ می شود.

$$(f \circ f)(k) = \frac{f(k)}{2} = \frac{k + 3}{2} = 27 \Rightarrow k + 3 = 54 \Rightarrow k = 51$$

راه حل دوم: برای اینکه داشته باشیم $f(f(k)) = 27$ ، باید $f(k) = 27 \times 2$ یا $f(k) = 27 - 3$ ؛ یعنی $f(k) = 54$ یا $f(k) = 24$ ، اما اگر $f(k) = 24$ آنگاه $f(f(k)) = 12$ است؛ بنابراین $f(k) = 24$ قابل قبول نیست، پس $f(k) = 54$. بدین منظور باید داشته باشیم $k = 54 - 3 = 51$ یا $k = 54 \times 2 = 108$. باتوجه به شرط مسئله $k = 108$ قابل قبول نیست، پس $k = 51$.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

برای یافتن وارون تابع f باید x را برحسب y به دست آوریم:

$$x^2 - 6x + 3 = y \xrightarrow{+6} x^2 - 6x + 9 = y + 6 \\ \Rightarrow (x - 3)^2 = y + 6 \Rightarrow x - 3 = \pm \sqrt{y + 6}$$

باتوجه به دامنه داده شده، x منفی است، پس $x - 3$ نیز منفی است؛ پس در عبارت بالا فقط علامت منفی پشت رادیکال مورد قبول است:

$$x - 3 = -\sqrt{y + 6} \Rightarrow x = 3 - \sqrt{y + 6} \quad (*)$$

چون طبق دامنه محدود شده داریم $x < 0$ ، پس:

$$3 - \sqrt{y + 6} < 0 \Rightarrow 3 < \sqrt{y + 6} \Rightarrow 9 < y + 6 \Rightarrow y > 3 \quad (**)$$

روابط $(*)$ و $(**)$ ضابطه و دامنه وارون تابع f را مشخص می کنند:

$$f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x + 6} ; x > 3$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

دامنه تابع $f \circ f$ برابر است با: $D_{f \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_f\}$
باتوجه به اینکه $D_f = [0, +\infty)$ ، داریم:

$$x \in D_f \Rightarrow x \in [0, +\infty)$$

$$f(x) \in D_f \Rightarrow f(x) \in [0, +\infty) \Rightarrow \sqrt{x} - x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq x \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

از اشتراک جواب های بالا، دامنه $f \circ f$ به صورت $D_{f \circ f} = [0, 1]$ به دست می آید.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x - [x]$$

پس برای محاسبه $g(\sqrt{2})$ باید اول معادله $f(x) = \sqrt{2}$ را حل کنیم:

$$f(x) = x^3 - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow x^3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

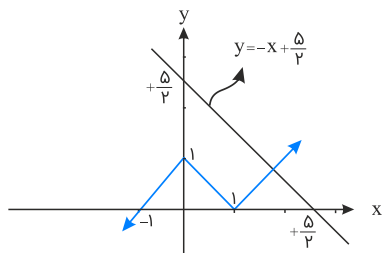
با جایگذاری $x = \sqrt{2}$ در تابع $g \circ f$ خواهیم داشت:

$$g(\sqrt{2}) = ? \xrightarrow{\sqrt{2}=f(\sqrt{2})} g(\sqrt{2}) = g(f(\sqrt{2})) = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۵

$$D_g : 2f(x+a) + 2x - 5 = 0 \Rightarrow f(x+a) = -x + \frac{5}{2}$$

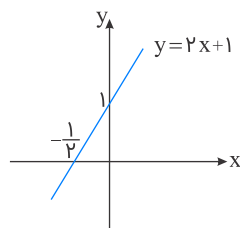
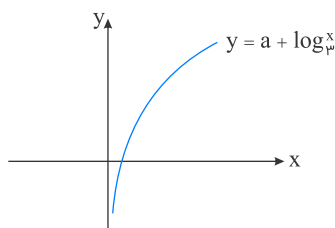
برای اینکه جواب معادله فوق یک بازه باشد، باید قسمتی از نمودار $f(x+a)$ بر تابع $y = -x + \frac{5}{2}$ منطبق شود. مطابق شکل، این حالت زمانی اتفاق می‌افتد که نمودار تابع f به اندازه $\frac{3}{2}$ واحد به راست انتقال یابد، یعنی $a = -\frac{3}{2}$.



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

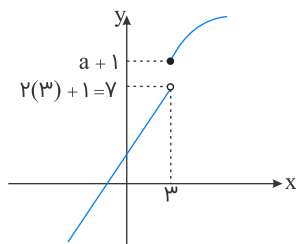
ابتدا شکل کلی از نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} a - \log_{\frac{1}{3}} x & ; x \geq 3 \\ 2x + 1 & ; x < 3 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:

$$y = a - \log_{\frac{1}{3}} x = a - \log_{3^{-1}} x = a + \log_3 x$$



حال هر دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:
شرط $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ به معنی صعودی بودن $f(x)$ است، برای صعودی بودن باید داشته باشیم:

$$7 \leq a + 1 \Rightarrow 6 \leq a$$



قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳ ۱۳۹۸

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به}} y = \sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به راست}} y = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y = x$ و $y = \sqrt{-x+2}$ (نیمساز ناحیه اول و سوم)، آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{به توان } 2} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$x = -2$ غیرقابل قبول است، زیرا در معادله اصلی صدق نمی‌کند.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۷

اگر x_1 و x_2 در بازه $[1, 2]$ باشند، داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

اما مقادیر $f(x_1)$ و $f(x_2)$ بین صفر و ۱ قرار دارند و f در فاصله صفر تا ۱ نزولی است، پس:

$$f(f(x_1)) > f(f(x_2))$$

یعنی $f(f(x))$ نزولی است.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 1 = (x-2)^3 + 1$$

$$\Rightarrow x-2 = \sqrt[3]{y-1} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1} + 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1} + 2$$

باتوجه به ضابطه f^{-1} داریم:

$$f^{-1}(x) = g(x-1) + 2$$

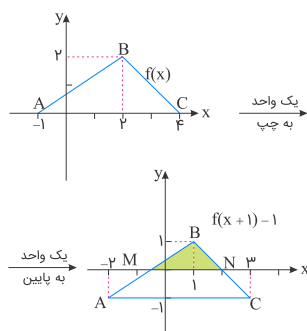
بنابراین $g(x)$ را باید یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

برای رسم نمودار تابع $y = f(x+1) - 1$ داریم:

طبق قضیه تالس طول پاره‌خط MN ، نصف طول پاره‌خط AC است و داریم:

$$MN = \frac{5}{2} \Rightarrow S_{\triangle MBN} = \frac{1}{2} (1) \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{5}{4}$$



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۹

کنکور سراسری علوم تجربی خارج از کشور ۱۳۹۵

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱ تابستان ۱۳۹۸

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ تابستان ۱۳۹۸

گام اول

هر تابع شامل قدر مطلق را می‌توان به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای نوشت. می‌دانیم:

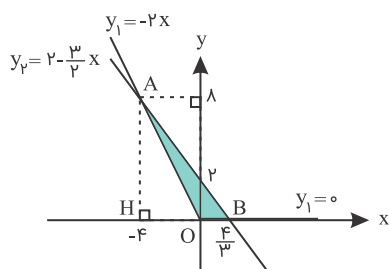
$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع $y = |x| - x$ را برای مقادیر $x \geq 0$ و $x < 0$ به دست می‌آوریم:

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x = 0 & ; x \geq 0 \\ -x - x = -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

نمودار هر دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{4}x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



برای محاسبه مساحت ناحیه محصور بین دو منحنی ابتدا مختصات محل تلاقی؛ یعنی نقطه A را با مساوی قرار دادن ضابطه‌ها تعیین می‌کنیم:

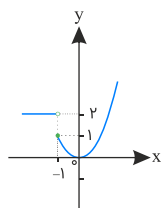
$$2 - \frac{3}{4}x = -2x \Rightarrow -2x + \frac{3}{4}x = 2 \Rightarrow -\frac{1}{4}x = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$\xrightarrow{y = -2x} y = 8 \Rightarrow A(-4, 8)$$

بنابراین ارتفاع مثلث $\triangle ABC$ برابر ۸ است و مساحتش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

نمودار تابع $f(x)$ مطابق شکل زیر است:



بنابراین تابع در بازه $[-1, 0]$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است؛ بنابراین داریم:

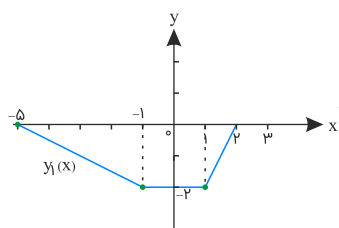
$$-1 < a < b < 0 \xrightarrow[\text{نزولی}]{\text{تابع اکیداً}} f(a) > f(b)$$

$$-1 < a < b < 0 \Rightarrow a^2 > b^2 > 0 \xrightarrow[\text{صعودی}]{\text{تابع اکیداً}} f(a^2) > f(b^2)$$

لازم به ذکر است که رابطه گزینه "۳" به ازای همه مقادیر a و b در بازه $(-1, 0)$ برقرار نیست. همچنین با جایگذاری $f(a) = |a|^2$ ، $f(b) = |b|^2$ و استفاده از این نکته که $|a|^2 < |a|$ است، نادرستی رابطه گزینه "۴" نیز به سادگی اثبات می شود.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

اگر نمودار تابع $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم و سپس یک واحد به سمت چپ انتقال دهیم، به نمودار تابع $y_1(x) = -f(x+1)$ خواهیم رسید:



حال با دقت به دو نمودار $y_1(x)$ و $g(x)$ درمی یابیم که برای رسیدن به نمودار تابع $g(x)$ ، $y_1(x)$ را باید در راستای افقی، دو برابر منقبض کنیم و سپس دو واحد در راستای عمودی به سمت بالا انتقال دهیم؛ یعنی:

$$g(x) = 2 + y_1(2x) \Rightarrow g(x) = 2 - f(2x+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 2 \end{cases} \Rightarrow 2m + n = 6$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

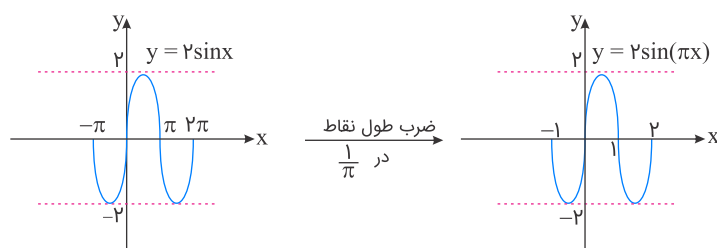
ابتدا توجه کنید که:

$$-1 < x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow f(x) = 2 \sin(-\pi x) = -2 \sin \pi x$$

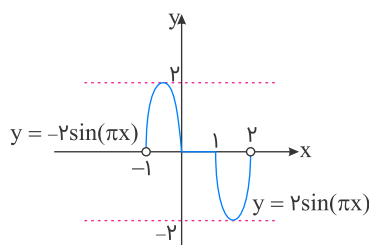
$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow f(x) = 2 \sin(0) = 0$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow f(x) = 2 \sin(\pi x)$$

از طرف دیگر نمودار تابع $y = 2 \sin(\pi x)$ به صورت زیر به دست می‌آید:



بنابراین نمودار تابع f در بازه $(-1, 2)$ به صورت زیر است:



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۹

در ابتدا هر دو ضابطه تابع باید اکیداً صعودی باشند؛ این یعنی حتماً $a \geq 0$ باشد؛ در غیر این صورت تابع x^2 غیریکنوا خواهد شد. حال کافی است در نقطه مشترک دو ضابطه، شرط اکیداً صعودی بودن تابع را بنویسیم. داریم:

$$2a + 1 \leq a^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a - 1)^2 \geq 2 \xrightarrow{a \geq 0} a \geq 1 + \sqrt{2}$$

در بین گزینه‌ها، فقط مقدار $\frac{5}{3}$ در این بازه قرار دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

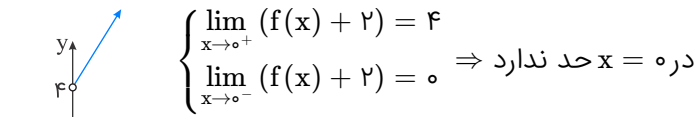
کافی است مراحل گفته شده را به صورت معکوس از آخر به اول انجام دهیم. ابتدا $\frac{1}{3}$ واحد در جهت عمودی منقبض می‌کنیم:

$$y = -\frac{1}{3} |3x - 12| = -|x - 4|$$

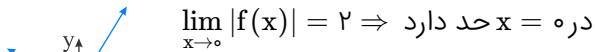
سپس آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم: $y = |x - 4|$
و در انتها ۲ واحد به چپ انتقال می‌دهیم: $y = |x - 2|$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۱ ۱۳۹۸

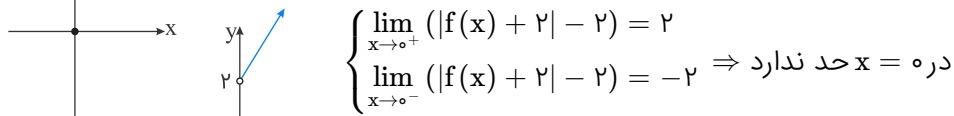
نمودار گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:
گزینه "۱":



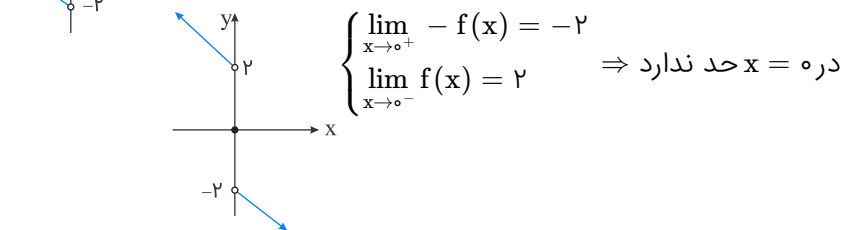
گزینه "۲":



گزینه "۳":



گزینه "۴":



قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۱۴ ۱۳۹۹

اگر تابعی را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم به ضابطه وارون آن می‌رسیم. پس اینجا باید وارون تابع $y = \sqrt[3]{x-1}$ را حساب کنیم:

$$y = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y^3 = x-1 \Rightarrow x = y^3 + 1 \xrightarrow[\text{جای } x \text{ و } y]{\text{عوض کردن}} y = x^3 + 1$$

نمودار به‌دست‌آمده را ۱ واحد به چپ می‌بریم:

$$y = x^3 + 1 \xrightarrow[\text{جای } x \text{ ها } x+1 \text{ می‌گذاریم}]{\text{جای } x \text{ و } y} y = (x+1)^3 + 1$$

و در راستای افقی با ضریب ۲ آن را منبسط می‌کنیم:

$$y = (x+1)^3 + 1 \xrightarrow[\text{جای } x \text{ ها } \frac{x}{2} \text{ می‌گذاریم}]{\text{به جای } x} y = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^3 + 1$$

حال ضابطه به‌دست‌آمده را با خط $y = 1$ قطع می‌دهیم:

$$\left(\frac{x}{2} + 1\right)^3 + 1 = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + 1 = 0 \Rightarrow x = -2$$

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۹

می‌دانیم که برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه تابع f را تابع صعودی می‌نامیم؛ پس:

$$\begin{aligned} 10 - x &\leq x^2 + 4 \leq 2x + 7 \\ \Rightarrow 10 - x &\leq x^2 + 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 \geq 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0 \\ \Rightarrow x &\in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty) \quad (I) \\ \Rightarrow x^2 + 4 &\leq 2x + 7 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) \leq 0 \\ \Rightarrow x &\in [-1, 3] \quad (II) \\ I \cap II : x &\in [2, 3] \Rightarrow \max(b - a) = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۳۹۸

تابع f یک تابع صعودی اکید است، زیرا:

$$f(x) = \underbrace{(2x^3)}_{\text{صعودی اکید}} + \underbrace{(x + 54)}_{\text{صعودی اکید}}$$

بنابراین چنانچه f با f^{-1} نقطه تلاقی داشته باشد، نقاط تلاقی روی خط $y = x$ خواهد بود.

$$\begin{aligned} 2x^3 + x + 54 &= x \Rightarrow 2x^3 = -54 \Rightarrow x^3 = -27 \Rightarrow x = -3 \\ \Rightarrow \text{نقطه تلاقی} : A(-3, -3) &\Rightarrow OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۵

تابع $f(x) = 3x + \sqrt{x}$ جمع دو تابع یک‌به‌یک است؛ بنابراین یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است.
تابع $h(x) = \sqrt{x} - 3x$ دارای دو ریشه $x = 0$ و $x = \frac{1}{9}$ است، پس یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.
تابع $k(x) = x + \frac{1}{|x|}$ درواقع دوضابطه‌ای است:

$$k(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} & ; x > 0 \\ x - \frac{1}{x} & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} & ; x > 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x} & ; x < 0 \end{cases}$$

که مثلاً معادله $k(x) = 3$ دارای دو ریشه مثبت است، پس تابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.
تابع $g(x) = x^2 + |x| + 100$ به دلیل اینکه $g(x) = g(-x)$ ، یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۲ ۱۳۹۸

این تابع صعودی اکید است؛ زیرا داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \\ \sqrt{4 - x_1} > \sqrt{4 - x_2} \Rightarrow -\sqrt{4 - x_1} < -\sqrt{4 - x_2} \end{cases}$$

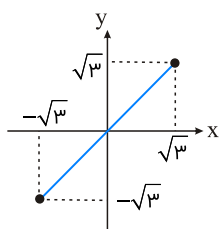
$$\Rightarrow \sqrt{x_1 - 1} - \sqrt{4 - x_1} < \sqrt{x_2 - 1} - \sqrt{4 - x_2}$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

بنابراین برای محاسبه برد تابع کافی است مقدار تابع در ابتدا و انتهای دامنه را حساب کنیم:

$$1 \leq x \leq 4 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(4) \Rightarrow -\sqrt{3} \leq f(x) \leq \sqrt{3} \Rightarrow D_{f^{-1}} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

از طرفی می‌دانیم به ازای هر x از دامنه f^{-1} داریم $f \circ f^{-1}(x) = x$ پس نمودار تابع g به شکل زیر است.



بنابراین برد این تابع به صورت $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ است که شامل ۳ عدد صحیح می‌باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

تابع صعودی $f(x)$ دارای دامنه و برد $\mathbb{R}$ است و محور x ها را طبق فرض سؤال در دو نقطه $x = 0$ و $x = 4$ قطع کرده است، پس می‌توان نتیجه گرفت حتماً بین $x = 0$ و $x = 4$ ثابت است، چراکه امکان ندارد بعد از نقطه $x = 0$ صعود کند و دوباره برگردد تا محور x را در $x = 4$ قطع کند، اما در مورد بعد $x = 4$ و قبل $x = 0$ نمی‌توان نظری داد.

پس تابع $f(2x)$ بین $x = 0$ و $x = 2$ ثابت است و $f(2x)$ در بازه $[0, 2]$ قطعاً صفر می‌شود، پس $x = 1$ قطعاً تابع y را صفر می‌کند و در دامنه $y = \sqrt{\sin x \cdot f(2x)}$ حضور دارد.

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۹

$$g\left(\frac{x}{y}\right) = \left\{ \left(6, \frac{1}{y}\right), (\lambda, y), (10, -1), (14, y) \right\}$$

$$yg\left(\frac{x}{y}\right) = \left\{ (6, 1), (\lambda, 4), (10, -2), (14, 6) \right\}$$

$$x = 6 \xrightarrow{yg\left(\frac{x}{y}\right)} 1 \xrightarrow{f} y \Rightarrow (6, y)$$

$$x = \lambda \xrightarrow{yg\left(\frac{x}{y}\right)} 4 \xrightarrow{f} -y \Rightarrow (\lambda, -y)$$

$$x = 10 \xrightarrow{yg\left(\frac{x}{y}\right)} -2 \xrightarrow{f} y \Rightarrow (10, y)$$

$$x = 14 \xrightarrow{yg\left(\frac{x}{y}\right)} 6 \xrightarrow{f} \text{وجود ندارد}$$

$$\Rightarrow f(yg(\frac{x}{y})) = \{(6, y), (\lambda, -y), (10, y)\}$$

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۶ ۱۳۹۶

در تابع fog داریم:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^3 - x) = x^6 - 2x^5 + x^4 + 1$$

$$\frac{x^3 - x = t}{x^6 - 2x^5 + x^4 = t^2} \rightarrow f(t) = t^2 + 1$$

برای به دست آوردن $f(3)$ داریم:

$$f(3) = 3^2 + 1 = 10$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۱۸ ۱۳۹۸

ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - \sqrt{(x-1)^2} = x - |x-1|$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x - x + 1 = 1 & ; x > 1 \\ x + x - 1 = 2x - 1 & ; x \leq 1 \end{cases}$$

تابع به ازای $x > 1$ یک تابع ثابت و در نتیجه معکوس‌ناپذیر است. بنابراین معکوس تابع را به ازای $x \leq 1$ محاسبه می‌کنیم:

$$f^{-1} \text{ دامنه } f \text{ برد } : x \leq 1 \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow 2x - 1 \leq 1$$

$$\Rightarrow f^{-1} \text{ دامنه } = \{x | x \leq 1\}$$

$$y = 2x - 1 \Rightarrow y + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} ; x \leq 1$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۷

$$f(3x-1) = \frac{2x-3}{5} \xrightarrow[x=\frac{t+1}{3}]{3x-1=t} f(t) = \frac{2(\frac{t+1}{3})-3}{5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x-7}{15}$$

$$\Rightarrow \text{gof}(x) = 3\left(\frac{2x-7}{15}\right) - 1 = \frac{6x-36}{15}$$

$$\begin{cases} y = \text{gof}(x) \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \frac{6x-36}{15} = -x \Rightarrow x = \frac{12}{7}$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۱۷ ۱۳۹۷

ابتدا معکوس تابع $f(x) = 2^{x+1}$ را می‌یابیم:

$$f(x) = 2^{x+1} \Rightarrow y = 2^{x+1} \Rightarrow \log_2^y = \log_2^{2^{x+1}}$$

$$\Rightarrow \log_2^y = x+1 \Rightarrow x = \log_2^y - 1 = \log_2^y - \log_2^2 = \log_2^{\frac{y}{2}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2^{\frac{x}{2}}$$

برای آنکه ترکیب gof^{-1} قابل انجام باشد، باید دامنه gof^{-1} را بیابیم:

$$D_{\text{gof}^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} | f^{-1} \in D_g\} = \{x \in (0, \infty) | f^{-1} \in D_g\}$$

دامنه تابع $g(x) = \sqrt{6-2x}$ برابر است با:

$$6-2x \geq 0 \Rightarrow 6 \geq 2x \Rightarrow x \leq 3$$

بنابراین:

$$D_{\text{gof}^{-1}} = \{x \in (0, +\infty) | \log_2^{\frac{x}{2}} \leq 3 \Rightarrow \frac{x}{2} \leq 8 \Rightarrow x \leq 16\}$$

$$\Rightarrow D_{\text{gof}^{-1}} = (0, +\infty) \cap (-\infty, 16] = (\underbrace{0}_a, \underbrace{16}_b]$$

$$\Rightarrow \max(b-a) = 16 - 0 = 16$$

قلمچی علوم تجربی چهارم آزمون شماره ۵ ۱۳۹۶

می‌دانیم که $(f \circ f^{-1})(x) = x$ برای همه مقادیر عضو $D_{f^{-1}}$ برقرار است. ازطرفی $D_{f^{-1}} = R_f$ و $R_f = [\frac{3}{4}, 2) \cup [3, 4)$. بنابراین باید معادله $x = x^2 - 3x + 3$ را حل کنیم. البته تنها جواب‌هایی قابل قبول هستند که عضو R_f باشند. با حل این معادله به $x = 1$ و $x = 3$ می‌رسیم که تنها $x = 3$ قابل قبول است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۷ ۱۳۹۹

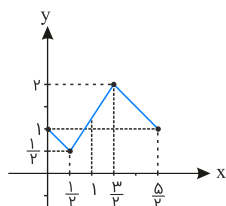
مراحل تبدیل نمودار به صورت زیر است:

$$f(x) \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{واحد ۳ انتقال}} f(x+3) \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انقباض افقی}} f(2x+3)$$

$$\xrightarrow[\text{محور } y]{\text{قرینه نسبت به محور}} f(-2x+3) \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به محور}} -f(3-2x) \xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انقباض عمودی}} -\frac{1}{2}f(3-2x)$$

$$\xrightarrow[\text{واحد به بالا}]{\text{انتقال یک}} -\frac{1}{2}f(3-2x) + 1$$

با انجام تبدیلات فوق، نمودار به صورت زیر درمی آید:



قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۳ ۱۳۹۸

ابتدا دامنه و برد تابع اولیه را حساب می کنیم:

$$-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\sqrt{-x} \geq 0} y \geq 0$$

حالا x را بر حسب y می نویسیم:

$$y = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{y \geq 0} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2$$

کافی است جای x و y را عوض کنیم: $y = -x^2$

دامنه تابع وارون همان برد تابع اولیه است، پس دامنه تابع وارون به صورت $x \geq 0$ است. در نتیجه وارون این تابع به صورت $y = -x^2$ با شرط $x \geq 0$ است.

قلمچی ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۸

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(f \circ g)^{-1}(2x - 4) = \frac{x}{2} \Rightarrow (g^{-1} \circ f^{-1})(2x - 4) = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(2x - 4)) = \frac{x}{2} \quad (*)$$

محل برخورد نمودار وارون تابع $f(x)$ با محور y ها، همان $f^{-1}(0)$ است؛ پس کافی است در رابطه $(*)$ ، x را ۲ قرار دهیم:

$$\xrightarrow[x=2]{(*)} g^{-1}(f^{-1}(2(2) - 4)) = \frac{2}{2} \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(0)) = 1 \xrightarrow{f^{-1}(0)=\alpha} g^{-1}(\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha = g(1) \xrightarrow{g(x)=2x^3+1} \alpha = 2(1)^3 + 1 = 2 + 1 = 3 \xrightarrow{\alpha=f^{-1}(0)} f^{-1}(0) = 3$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸

$$f(x) = 2 + \frac{5}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{3\} \\ R_f = \mathbb{R} - \{2\} \end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow \begin{cases} D_g = [-3, 3] \\ R_g = [0, 3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f(x)} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \mid \left|2 + \frac{5}{x-3}\right| \leq 3\right\}$$

$$\text{حل نامعادله فوق} : -3 \leq 2 + \frac{5}{x-3} \leq 3 \Rightarrow -5 \leq \frac{5}{x-3} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{x-3} \leq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3 < 0 : -1 \leq \frac{1}{x-3} < 0 \Rightarrow x-3 \leq -1 \Rightarrow x \leq 2 \\ x-3 > 0 : 0 < \frac{1}{x-3} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow x-3 \geq 5 \Rightarrow x \geq 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \{x \mid x \leq 2 \text{ یا } x \geq 8\} = \mathbb{R} - (2, 8)$$

بنابراین اعداد صحیح ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ نمی‌توانند جزء دامنه $(g \circ f)(x)$ باشند.

قلمچی ریاضی و فیزیک دوازدهم آزمون شماره ۸ ۱۳۹۸

می‌دانیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \mid -4 \leq x \leq 4, 2 \leq |x-1| \leq 4\}$$

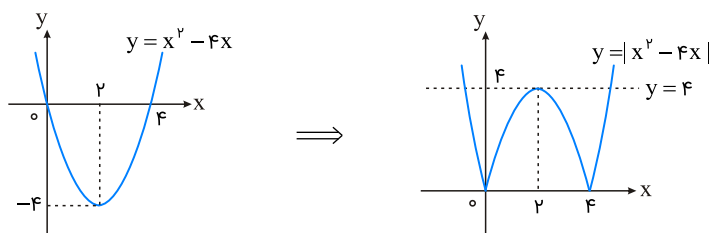
$$2 \leq |x-1| \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow 3 \leq x \leq 5 \\ \text{یا} \\ -4 \leq x-1 \leq -2 \Rightarrow -3 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = [-4, 4] \cap ([-3, -1] \cup [3, 5])$$

$$= [-3, -1] \cup [3, 4] = [-3, 4] - (-1, 3)$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

ابتدا نمودار تابع $y = x^2 - 4x$ را رسم می‌کنیم و سپس قسمت‌های منفی نمودار را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



بنابراین $k = 4$ می‌باشد.

قلمچی ریاضی و فیزیک سوم آزمون شماره ۱۲ ۱۳۹۶

$$g(f(a)) = 15 \xrightarrow{f(a)=t} g(t) = 15$$

$$\Rightarrow g(t) = 2f(t+2) - 3 = 15 \Rightarrow f(t+2) = 9 \xrightarrow{f(6)=9} t+2 = 6 \Rightarrow t = 4$$

$$\Rightarrow f(a) = 4 \Rightarrow a = 3$$

قلمچی علوم تجربی دوازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۸